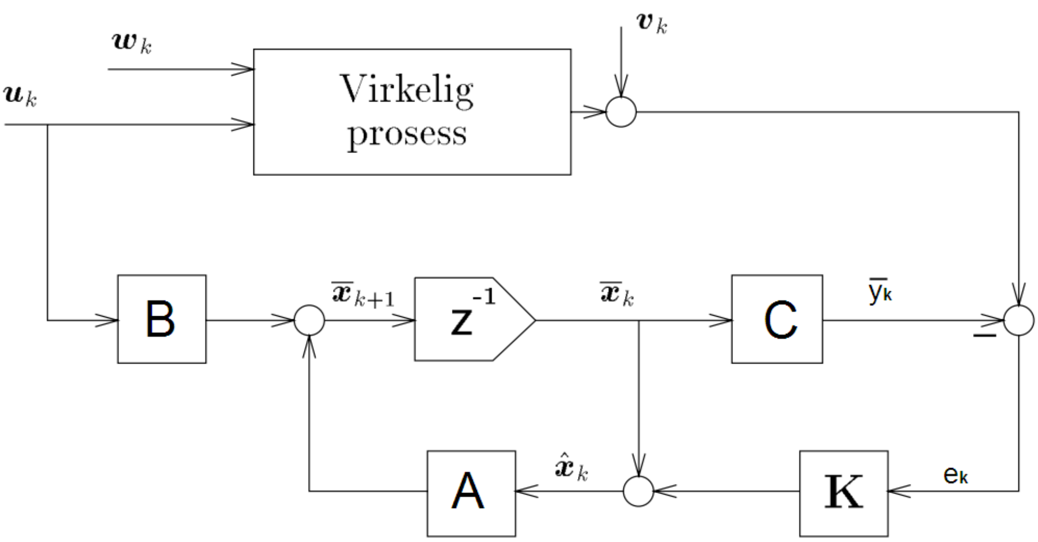
University College of Southeast Norway

Solutions

Tilstandsestimering – Løsninger

HANS-PETTER HALVORSEN



http://home.hit.no/~hansha

Innholdsfortegnelse

1 Grunnlag

Her er noen utvalgte oppgaver ifm den teoretiske bakgrunnen til tilstandsestimatorer som Kalmanfilter og Observer.

1.1 Statistikk og Stokastiske systemer

Task 1: Middelverdi/Gjennomsnitt:

1 **Forklar begrepet middelverdi og sett opp uttrykket for middelverdien**

Svar:

Middelverdien μ ("mean"/"average") til en tallrekke/datasett $x_1, x_2, \cdots, x_N$ er gitt som følger:

$$\mu = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

(Det er vanlig å bruke den greske bokstaven "Mu" μ som symbol på standardavviket)

2 **Finn middelverdien for følgende:**

Gitt følgende datasett: $2.2, 4.5, 6.2, 3.6, 2.6$

Svar:

Bruk formelen over.

3 **Sjekk svaret vha MathScript og LabVIEW**

Svar:

MathScript:

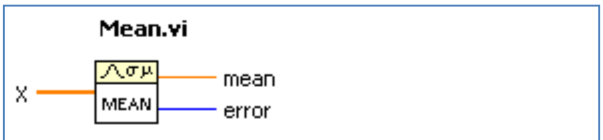
I MathScript kan vi bruke den innebygde funksjonen mean():

```
x=[2.2, 4.5, 6.2, 3.6, 2.6]
middelverdi = mean(x)
```

Svaret blir: 3.82

LabVIEW:

Du kan f.eks bruke funksjonen ”Mean.vi”



Computes the **mean** of the values in the input sequence **X**.

[End of Task]

Task 2: Forventningsverdi

Forklar begrepet forventingsverdi

Svar:

Engelsk: ”Expectation value” (derfor brukes $E(\cdot)$)

For stokastiske variable bruker vi begrepet forventningsverdien istedenfor middelverdien. For en stokastisk variabel X, skriver man $E[X]$ for forventningsverdien til X.

Hvis X er en diskret stokastisk variabel, og antar verdiene $x_1, x_2, \ldots$ med sannsynlighet henholdsvis $p_1, p_2, \ldots$ så er forventningsverdien $E(X)$ gitt ved:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

der p er sannsynligheten.

Altså: Forventningen til en stokastisk variabel er en verdi, slik at hvis man gjentar eksperimentet som ligger til grunn for variabelen mange ganger, vil gjennomsnittet av utfallene nærme seg forventningen. I det diskrete tilfellet er forventningen lik summen av sannsynligheten for hvert utfall, multiplisert med verdien av dette utfallet.

[End of Task]

Task 3: Varians

Forklar begrepet varians

Svar:

Varians er et mål på variasjonen i en statistisk fordeling. Vi bruker ofte σ^2 (der σ er standardavviket) som symbol for variansen. For en stokastisk variabel X er variansen definert som:

$$Var(X) = \sigma^2 = E[(X-\mu)^2]$$

For et gitt antall verdier (datasett) har vi:

$$Var(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2$$

der $E(X)$ er forventningsverdien.

Variansen utrykker hvor stort det kvadratiske avviket til observasjonene er i gjennomsnitt.

2 Finn variansen for følgende:

Gitt følgende datasett: $2.2, 4.5, 6.2, 3.6, 2.6$

Svar:

Bruk formelen over.

3 Sjekk svaret vha MathScript og LabVIEW

Svar:

MathScript:

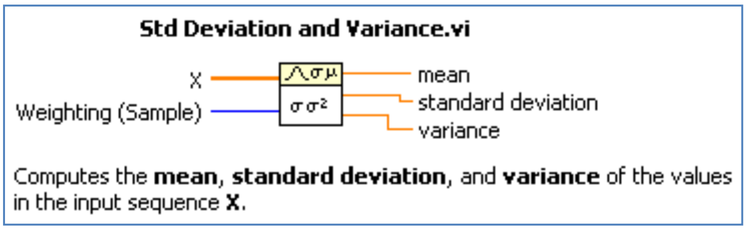
I MathScript kan vi bruke den innebygde funksjonen var():

```
x=[2.2, 4.5, 6.2, 3.6, 2.6]
varians = var(x)
```

Svaret blir: 2.572

LabVIEW:

Du kan f.eks. bruke følgende funksjon:



[End of Task]

Task 4: Standardavvik

1 Forklar begrepet standardavvik

Svar:

Standardavviket er et mål for spredningen av verdiene i et datasett eller av verdien av en stokastisk variabel. Den er definert som kvadratroten av variansen.

Standardavvik σ er gitt som følger:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}$$

(Det er vanlig å bruke den greske bokstaven "Sigma" σ som symbol på standardavviket)

Vi har at:

$$\sigma^2 = Var(X) \Leftrightarrow \sigma = \sqrt{Var(X)}$$

2 Finn standardavviket for følgende:

Gitt følgende datasett: $2.2, 4.5, 6.2, 3.6, 2.6$

Svar:

Bruk formelen over.

3 Sjekk svaret vha MathScript og LabVIEW

Svar:

MathScript:

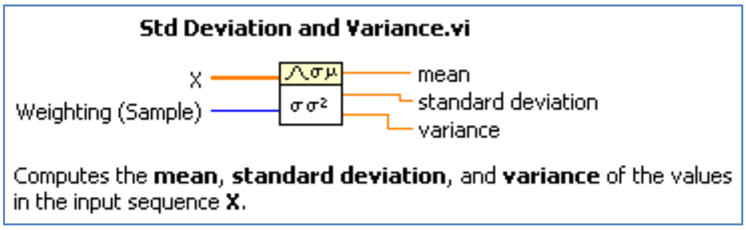
I MathScript kan vi bruke den innebygde funksjonen *std()*:

```
x=[2.2, 4.5, 6.2, 3.6, 2.6]
standardavvik = std(x)
```

Svaret blir: 1.6037

LabVIEW:

Du kan f.eks. bruke følgende funksjon:



[End of Task]

Task 5: Farget og Hvit støy

Forklar hva vi mener med farget og hvit støy

Svar:

Hvit støy er et stokastisk signal, dvs. støy som varierer helt tilfeldig. I Kalmanfilteret forutsettes det at støyen er hvit.

Man skiller mellom hvit støy, der alle frekvenser er likt repesentert og støy der fordelingen er annerledes. Støysignalet er kjennetegnet av å være tilfeldig, det vil si at å kjenne signalet fram til et gitt tidspunkt ikke forteller hvordan det vil se ut i neste øyeblikk. Dette i motsetning til f.eks. en sinusbølge. Det eneste som er kjent er sannsynlighetsfordelingen for de forskjellige frekvensenes energitettheter.

For hvit støy er middelverdien lik null, $\mu = 0$

Som en motsetning til hvit støy har vi farget støy som ikke varierer helt tilfeldig. Det finnes flere typer.

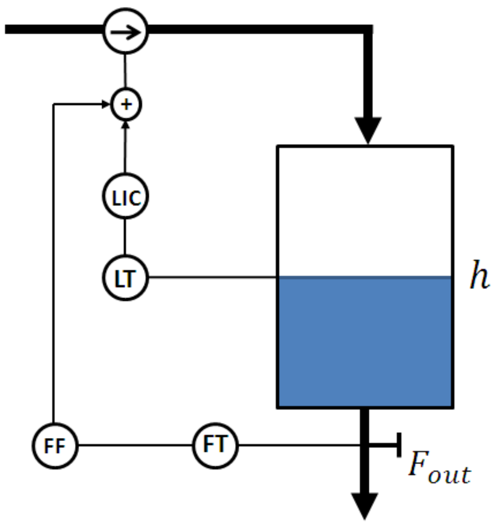
[End of Task]

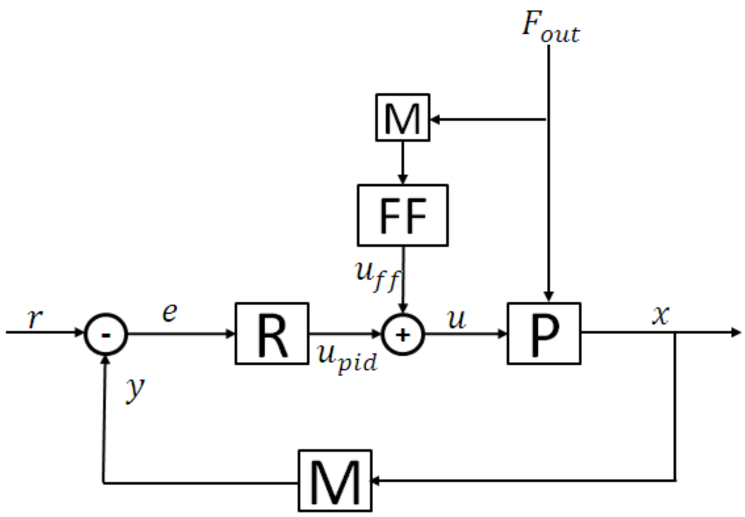
1.2 Foroverkobling

Task 6: Foroverkobling

Tegn en skisse av reguleringssystemet med tilbakekobling og foroverkobling

Svar:





Design regulatoren som skal brukes i foroverkoblingen.

Svar:

Vi har følgende modell:

$$\dot{h} = \frac{1}{A_t}[K_p u - F_{out}]$$

We will use this model in order to find the feedforward controller.

In this model is F_{out} a noise signal/disturbance that we want to remove by using Feedforward.

We introduce the following parameters:

u_{pid} - Control signal from original feedback controller (PID controller)

u_f – Control signal from feedforward controller

$u = u_{pid} + u_f$ – Total control signal

We want to design the Feedforward controller so that F_{out} is eliminated.

We solve for the control variable u, and substituting the process output variable h by its setpoint h_{sp}. This gives the following feedforward controller u_f:

$$u_f = \frac{A_t \dot{h}_{sp}}{K_p} + \frac{F_{out}}{K_p}$$

We assume that the setpoint is constant, i.e. $\dot{h}_{sp} = 0$. This gives:

$$u_f = \frac{F_{out}}{K_p}$$

F_{out} is not measured, so we have to use the estimated value instead. This gives the following Feedforward controller:

$$\boxed{\boldsymbol{u_{ff} = \frac{F_{out,est}}{K_p}}}$$

Note! Without feedforward control the control signal range of the PID controller is normally $[0, 5]$. With feedforward the output signal can be set to have the range $[-5, +5]$, so the contribution u_{pid} from the PID controller can be negative. If u_{pid} cannot be negative, the total signal $u = u_{pid} + u_f$ may not be small enough value to give proper control when the outflow is small.

[End of Task]

1.3 Matriser

Task 7: Determinant

Finn determinanten til følgende matrise (penn og papir):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Svar:

Slik finner vi determinanten for et 2x2 system:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\det(A) = |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}$$

Vi får da:

$$\det(A) = |A| = 3 \cdot 1 - 5 \cdot (-2) = 3 + 10 = \underline{\underline{13}}$$

2 Vis hvordan dette gjøres i MathScript

Svar:

I MathScript kan vi gjøre følgende:

```
A=[3 -2;5 1];
det(A)
rank(A)
```

Som gir følgende svar:

```
ans = 13 (determinant)

ans = 2 (rang)
```

3 Finn determinanten til følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Svar:

Slik finner vi determinanten for et 3x3 system:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Vi utvikler determinanten langs en rekke eller en kolonne.

Her utvikler vi determinanten langs første kolonne:

$$\boxed{\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}$$

Vi ser at determinanten til et høyere ordens system kan uttrykkes som en sum av lavere ordens determinanter.

I vårt tilfelle får vi da:

$$\det(A) = (-1) \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Dette gir:

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 - (-20) = 18$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 0 = -6$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 0 = -15$$

Som gir:

$$\det(A) = -18 + 12 - 15 = \underline{\underline{-21}}$$

4 Vis hvordan dette gjøres i MathScript

Svar:

I MathScript kan vi gjøre følgende:

```
A=[-1 3 0; 2 1 -5; 1 4 -2];
det(A)
rank(A)
```

Som gir følgende svar:

```
ans = -21 (determinant)

ans = 3 (rang)
```

[End of Task]

Task 8: Egenverdier

Gitt en matrise A.

1 Sett opp formelen for å finne egenverdiene til A

2 Sett opp den karakteristiske likning

3 Sett opp det karakteristiske polynom

Svar:

Egenverdiene til A er gitt ved:

$$\boxed{\det(sI - A) = |sI - A| = 0}$$

$\det(sI - A) = 0$ kalles den **karakteristiske likning** og løsningene til denne likningen kalles egenverdiene til A.

Polynomet $\det(sI - A)$ er definert som det **karakteristiske polynom**

[End of Task]

Task 9: Egenverdier – 2.ordens system

1. **Finn egenverdiene til følgende matrise:**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Svar:

Egenverdiene til A er gitt ved:

$$\boxed{\det(sI - A) = |sI - A| = 0}$$

Egenverdiene blir:

$$\det\left(\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

videre:

$$det\begin{pmatrix} s_1 + 1 & -2 \\ 0 & s_2 + 2 \end{pmatrix} = 0$$

Slik finner vi determinanten for et 2x2 system:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\det(A) = |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}$$

Vi får da:

$$\det(A) = (s_1 + 1)(s_2 + 2) = 0$$

dette gir:

$$\underline{s_1 = -1}, \qquad \underline{s_2 = -2}$$

2. **Bruk MathScript for å verifisere svaret ditt**

Svar:

MathScript: I MathScript kan vi bruke funksjonen eig()

```
A=[-1, 2; 0, -2];
egenverdier = eig(A)
```

Dette gir følgende svar:

```
egenverdier =

    -2

    -1
```

3 **Finn egenverdiene til følgende matrise:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Svar:

Egenverdiene til A er gitt ved:

$$\boxed{\det(sI - A) = |sI - A| = 0}$$

Egenverdiene blir:

$$\det\left(\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

videre:

$$det\begin{pmatrix} s_1 - 2 & 0 \\ -1 & s_2 - 2 \end{pmatrix} = 0$$

Slik finner vi determinanten for et 2x2 system:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\det(A) = |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}$$

Vi får da:

$$\det(A) = (s_1 - 2)(s_2 - 2) = 0$$

Dette gir:

$$\underline{s_1 = s_2 = 2}$$

4 Bruk MathScript for å verifisere svaret ditt.

Svar:

```
A=[2 0; 1 2];
eig(A)
```

```
ans =

        2

        2
```

[End of Task]

Task 10: Egenverdier – 3.ordens system

1 **Finn egenverdiene til følgende matrise:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Svar:

Egenverdiene til A er gitt ved:

$$\boxed{\det(sI - A) = |sI - A| = 0}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

videre:

$$det\begin{pmatrix} s_1 - 1 & -2 & -3 \\ 1 & s_2 - 4 & -3 \\ -1 & 2 & s_3 + 1 \end{pmatrix} = 0$$

Slik finner vi determinanten for et 3x3 system:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Vi utvikler determinanten langs en rekke eller en kolonne.

Her utvikler vi determinanten langs første kolonne:

$$\boxed{\det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}$$

Vi ser at determinanten til et høyere ordens system kan uttrykkes som en sum av lavere ordens determinanter.

…

Dette gir følgende svar:

$$s_1 = 0, s_2 = s_3 = 2$$

2 **Bruk MathScript for å verifisere svaret ditt.**

Svar:

MathScript kode:

```
A=[1 2 3; -1 4 3; 1 -2 -1];
eig(A)
```

Svaret blir:

```
ans =

        -7.3834e-016

         2

         2
```

[End of Task]

1.4 Observerbarhet

Task 11: Utledning av Observerbarhetsmatrisen

1 **Utled uttrykket for Observerbarhetsmatrisen**

Svar:

Observerbarhet kan defineres slik:

Systemet:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = Cx_k + Du_k$$

er observerbart hvis det finnes en endelig k slik at kjennskap til $u(0), \dots, u(k-1)\ og\ y(0), \dots, y(k-1)$ er tilstrekkelig til å bestemme systemets initialtilstand $x(0)$.

Utledning:

vi antar $u(k) = 0$, det gir:

$$x_{k+1} = Ax_k$$

$$y_k = Cx_k$$

Vi får da:

	$y(0) = Cx(0)$
$x(1) = Ax(0)$	$y(1) = Cx(1) = CAx(0)$
$x(2) = Ax(1) = AAx(0) = A^2x(0)$	$y(2) = Cx(2) = CA^2x(0)$
…	…
$x(n-1) = A^{n-1}x(0)$	$y(n-1) = Cx(n-1) = CA^{n-1}x(0)$

Dette gir:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}_{\equiv O} x(0)$$

[End of Task]

Task 12: Finn Observerbarhetsmatrisen

Finn Observerbarhetsmatrisen for følgende system:

Gitt følgende system:

$$x_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} x_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B} u_k$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} u_k$$

Svar:

Får da ($n = 2$):

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2 \quad 1] \\ [2 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ (2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)) & (2 \cdot 1 + 1 \cdot 2) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}}$$

Vis koden for hvordan dette gjøres i MathScript

I MathScript kan vi bruke funksjonene *obsv()* , *det()* og *rank()*

```
A = [1, 1; -1, 2]
B = [1, 2]'
C = [2, 1]
D = 0
system = ss(A, B, C, D)

Ob = obsvmx(system)
det(Ob)
rank(Ob)
```

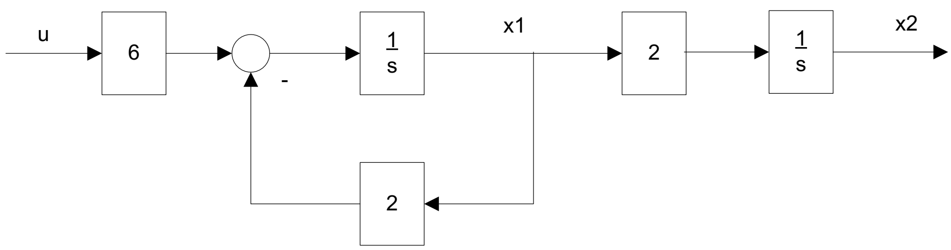
som gir:

```
Ob = 2    1

     1    4

ans = 7 (determinant)

ans = 2 (rang)
```

[End of Task]

Task 13: Observerbarhet

Gitt følgende blokkdiagram:



Sjekk om systemet er Observerbart. Sett $x_2 = y$

Svar:

Vi må finne tilstandsrommodellen til systemet med utgangspunkt i blokkdiagrammet over.

Fra blokkdiagrammet får vi:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + 6u$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1$$

Dette gir følgende tilstandsrommodell:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Observerbarhetsmatrisen er definert som:

$$\boxed{\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{\boldsymbol{n-1}} \end{bmatrix}}$$

hvor n er systemets orden, dvs. antall tilstander i tilstandsrommodellen.

→ Et system med orden n er observerbart hvis O har full rang, dvs rangen til O er lik n.

$$rang(O) = n \rightarrow Observerbart$$

→ Rangen kan sjekkes ved å finne determinanten til O. Hvis determinanten er ulik null, har O full rang og systemet er dermed observerbart.

$$\det(O) \neq 0 \rightarrow Observerbart$$

Bruk MathScript for å gjøre det samme

Svar:

Bruk funksjone *obsvmx()*, *det()* og *rank()* …

…

[End of Task]

1.5 Tilstandsrommodeller

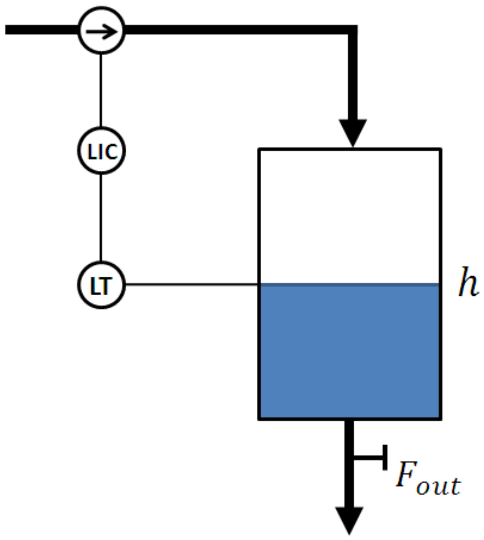
Task 14: Tilstandsrommodell

Gitt følgende system:

$$A_t\dot{h} = K_p u - F_{out}$$

eller

$$\dot{h} = \frac{1}{A_t}[K_p u - F_{out}]$$



For det virkelige systemet blir kun nivået (h) målt, så vi ønsker å benytte et Kalman Filter for estimering av utstømningen (F_{out}).

En generell tilstandsrommodell kan skrives:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Vi setter

$x_1 = h = y$ og $x_2 = F_{out}$

Vi antar at F_{out} er konstant, dvs., $\dot{F}_{out} = 0$

Finn tilstandsrommodellen for systemet Finn matrisene A, B, C og D i tilstandsrommodellen.

<u>**Svar:**</u>

We have:

$$\dot{h} = \frac{1}{A_t}[K_p u - F_{out}]$$

$h = x_1$ gives:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{A_t}[K_p u - F_{out}]$$

$x_2 = F_{out}$: We then assume that F_{out} is constant (changes very slowly), thus $\dot{F}_{out} = 0$.

This gives:

$$\dot{x}_2 = 0$$

Then we have the following differential equations for the system:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{A_t}[K_p u - x_2]$$

$$\dot{x}_2 = 0$$

This gives the linear state-space model:

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{A_t}x_2 + \frac{1}{A_t}K_p u$$

$$\dot{x}_2 = 0$$

$$y = x_1$$

Which gives:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{A_t} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{K_p}{A_t} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

i.e., $D = [0]$

2 Sjekk om systemet er Observerbart

Bruk $K_p = 16.5 cm^3/s$ og $A_t = 78.5\text{cm}^2$

Svar:

Observerbarhetsmatrisa er gitt ved:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Vi har at:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{A_t} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$n = 2$$

Dette gir:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \cdots$$

Vi har at:

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{A_t} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{A_t} \end{bmatrix}$$

Observerbarhetsmatrisa blir:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{A_t} \end{bmatrix}$$

Determinanten blir:

$$\det(O) = -\frac{1}{A_t}$$

Hvis vi f.eks bruker $A_t = 78.5\text{cm}^2$ får vi:

$$\det(O) = -\frac{1}{78.5} = -0.0127$$

3 **Implementer modellen i MathScript/LabVIEW. Sjekk om systemet er Observerbart**

Svar:

MathScript kode:

```
clc, clear
K=16.5;
A_tank=78.5;

A=[1, -1/A_tank; 0, 0];
B=[K/A_tank; 0];
C=[1, 0];
D=[0];

model = ss(A, B, C, D);

obs = obsvmx(model)
det(obs)
rank(obs)
```

Resultatet ble som følger:

```
obs =

           1         0

           1   -0.0127


ans =      -0.0127

ans =        2
```

[End of Task]

Task 15: Diskretisering

I forrige oppgave fant vi en kontinuerlig tilstandsrommodell av en vanntank.

Finn den diskrete lineære tilstandsrommodellen på følgende form:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = Cx_k + Du_k$$

Bruk **Euler Forover**

$$\dot{x} \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{T_s}$$

hvor T_s er samplingstiden.

Finn matrisene $A, B, C\ og\ D$.

Svar:

We have from the previous task:

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{A_t}x_2 + \frac{1}{A_t}K_p u$$

$$\dot{x}_2 = 0$$

We use Euler Forward discretization method:

$$\boxed{\dot{x} \approx \frac{x(k+1) - x(k)}{T_s}}$$

Applying Euler Forward discretization method gives:

$$\frac{x_1(k+1) - x_1(k)}{T_s} = -\frac{1}{A_t}x_2(k) + \frac{1}{A_t}K_p u(k)$$

$$\frac{x_2(k+1) - x_2(k)}{T_s} = 0$$

This gives:

$$x_1(k+1) = x_1(k) - \frac{T_s}{A_t} x_2(k) + \frac{T_s K_p}{A_t} u(k)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k)$$

The discrete state-space model then becomes:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{T_s}{A} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{T_s K_p}{A} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(k)$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

2 **Bruk MathScript/LabVIEW for å verifisere svaret ditt.**

Svar:

Følgende MathScript kode finner den diskrete tilstandsrommodellen:

```
clc, clear
K=16.5;
A_tank=78.5;

A=[0, -1/A_tank; 0, 0];
B=[K/A_tank; 0];
C=[1, 0];
D=[0];

model = ss(A, B, C, D);

obs = obsvmx(model)
det(obs)
rank(obs)


% Discrete model
Ts=0.1;
dmodel = c2d(model, Ts, 'forward')
```

Dette gir følgende resultat:

```
a


  1  -0.0013

  0   1

b
```

```
  0.021
  0
c
  1   0
d
  0
```

Sjekk om det diskrete systemet er Observerbart

Svar:

Observerbarhetsmatrisa er gitt ved:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Vi har at:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\mathrm{T_s}}{A_t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$n = 2$$

Dette gir:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \cdots$$

Vi har at:

$$\mathrm{CA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\mathrm{T_s}}{A_t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{T_s}{A_t} \end{bmatrix}$$

Observerbarhetsmatrisa blir:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{T_s}{A_t} \end{bmatrix}}$$

Slik finner vi determinanten for et 2x2 system:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\det(A) = |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}$$

Determinanten blir da:

$$\det(O) = -\frac{T_s}{A_t}$$

Hvis vi f.eks bruker $A_t = 78.5\text{cm}^2$ får vi:

$$\det(O) = -\frac{T_s}{A_t} = -\frac{0.1}{78.5} = -0.0013$$

MathScript:

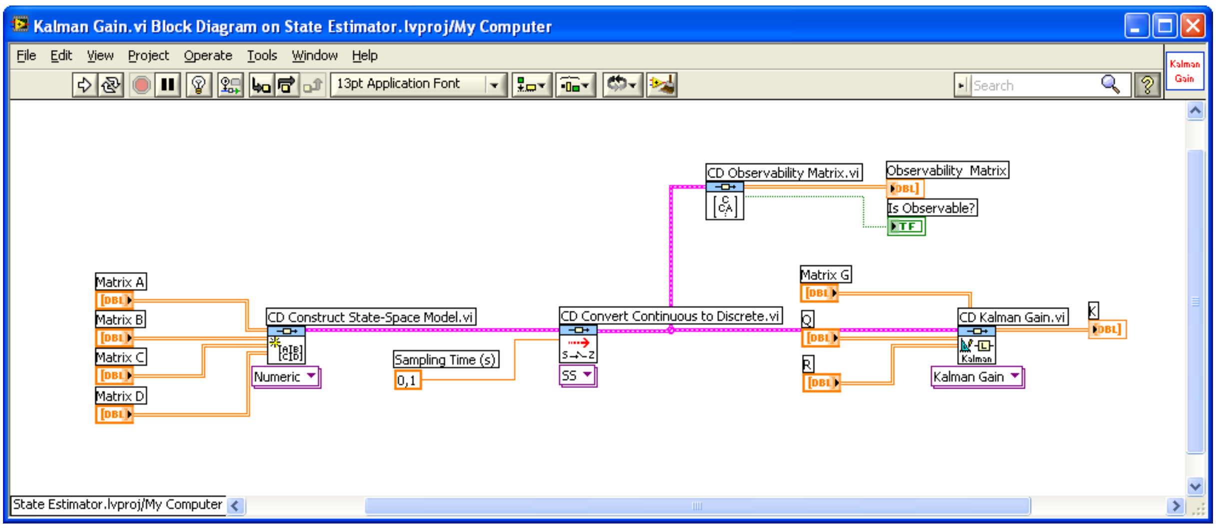
Vi kan også finne om det diskrete systemet er Observerbart:

```
obs_d = obsvmx(dmodel)
det(obs_d)
rank(obs_d)
```

Dette gir følgende svar:

```
obs_d =

         1          0

         1    -0.0013

ans =  -0.0013

ans =   2
```

I LabVIEW kan vi gjøre følgende:



[End of Task]

1.6 Modellbasert PID tuning

Task 16: Skogestad's metode

Forklar Skogestad's metode for å finne PID parametrene i en PID regulator.

Ta utgangspunkt i at prosessen er gitt ved følgende modell:

$$H = \frac{K}{Ts + 1} e^{-\tau s}$$

Svar:

You need to apply a step on the input and then observe the response and the output.

The Skogestad's formulas for this system are:

$$K_p = \frac{T}{K(T_c + \tau)}$$

$$T_i = min[T, c(T_c + \tau)]$$

$$T_d = 0$$

In this task we can set $T_C = 10$ sec and $c = 1.5$.

[End of Task]

2 Kalmanfilter

Her er noen utvalgte oppgaver ifm bruk av Kalmanfilter som tilstandsestimator.

2.1 Innledning

Task 17:	Hva er et Kalmanfilter?

Hva er et Kalmanfilter? Gi en overordnet beskrivelse. Tegn og forklar

Svar:

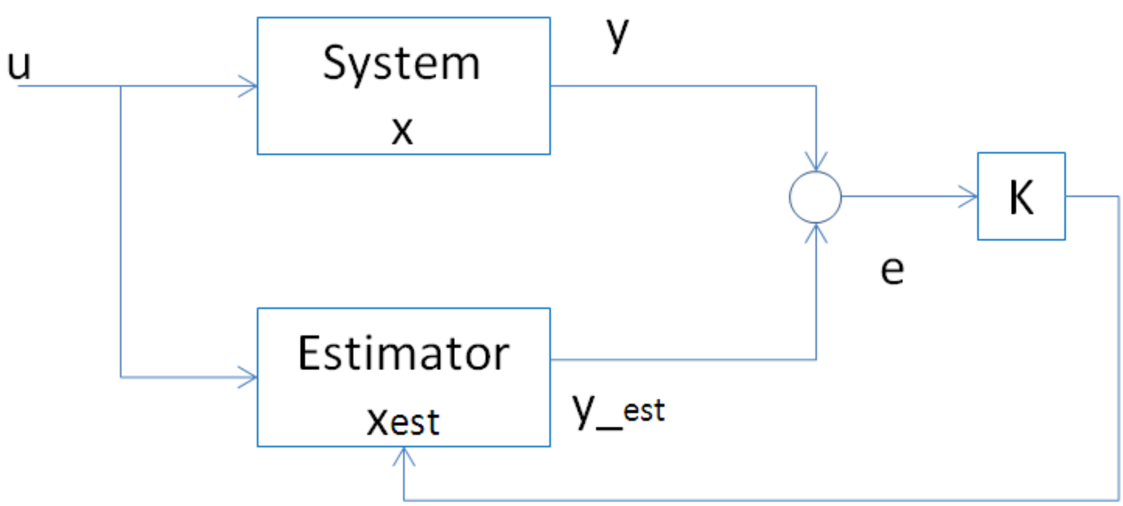
Et Kalmanfilter brukes til å estimere tilstandsvariabler i en gitt prosess basert på en matematisk modell av prosessen.

Kort fortalt er Kalmanfilter en metode (modellbasert algoritme) for å estimere tilstandsvariablene i en prosess som er forutsatt påvirket av stokastiske (tilfeldige) forstyrelser og av stokastisk (tilfeldig) støy (dvs hvit normalfordelt støy).

→ En matematisk modell av en gitt prosess kjører i parallell med prosessen. Brukes for å estimere de tilstandene i prosessen som vi ikke måler (av ulike årsaker).

→ Vi bruker $\bar{x}$ og $\hat{x}$ som symboler på at det er et estimat.

Detaljert skisse:



→ Dvs vha en matematisk algoritme (Kalmanfilter algoritmen) finner vi avviket mellom målt verdi og estimatet. Dette avviket brukes til å oppdatere modellen vha en forsterkningsmatrise K.

[End of Task]

Task 18: Estimator - Kalmanfilter

Sett opp de matematiske likningene for prosessen (systemet) og estimatoren.

På bakgrunn av disse likningene sett opp et blokkdiagram. Forklar blokkdiagrammet.

Svar:

Prosess:

Vi tar utgangspunkt i følgende system (virkelig prosess):

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k$$

$$y_k = Cx_k + v_k$$

der w er prosess-støy og v er målestøy. Det antas at w og v er hvit og normalfordelt støy som er uavhengige av hverandre, dvs.:

$$p(w) \sim N(0, Q)$$

$$p(v) \sim N(0, R)$$

der Q er prosessstøy-kovariansen og R er målestøy-kovariansen. Disse kan i prinsippet variere med tiden men vi antar at de er konstante.

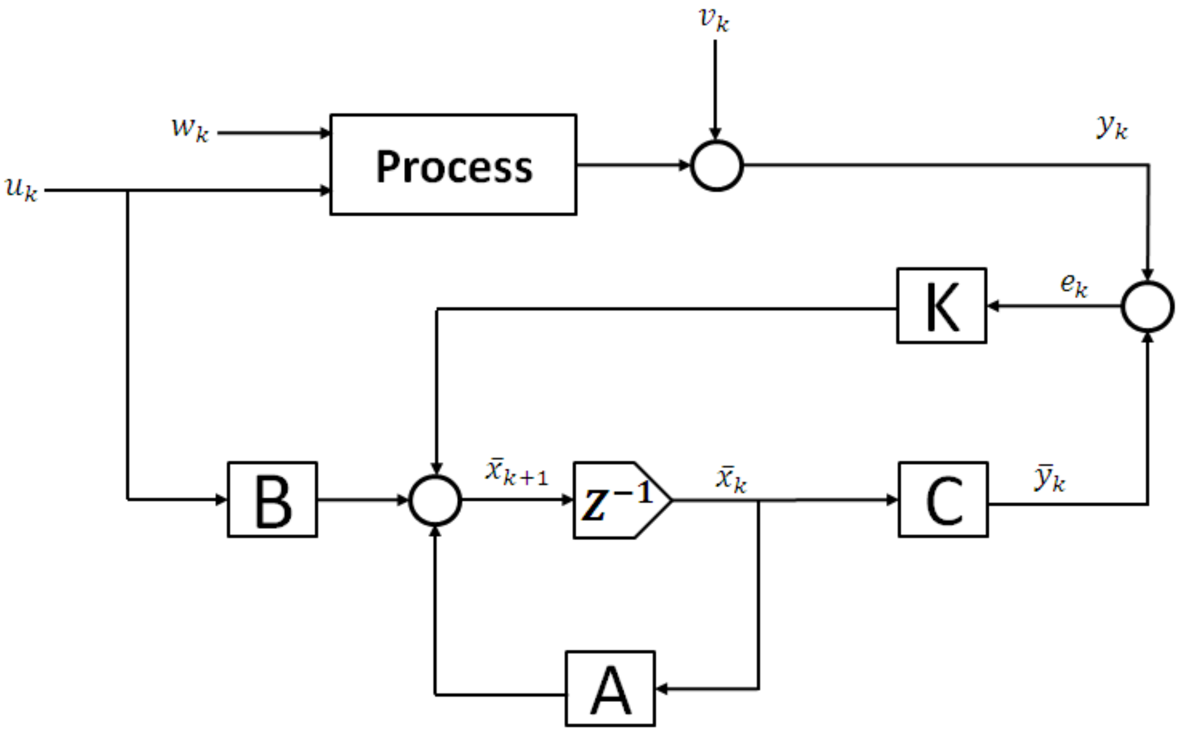
Estimator:

og følgende estimator (modell):

$$\bar{x}_{k+1} = A\bar{x}_k + Bu_k + K(y_k - \bar{y}_k)$$

$$\bar{y}_k = C\bar{x}_k$$

Da kan vi tegne Kalmanfilteret på følgende måte:



→ Dvs vi lager en matematisk modell som kjører i parallell med den virkelige prosessen. Modellen oppdateres vha en forsterkningsmatrise K.

→ Merk! Vi må ha minst en fysisk måling for at Kalmanfilteret skal virke.

→ Merk! Pådraget u_k påtrykkes både den fysiske prosessen og estimatoren (modellen)

NB! z er den diskrete versjonen av Laplace-operatoren s (z-transformasjon)

der:

x er tilstandsvektoren med n tilstander	$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$
u er pådragsvektoren med m pådrag	$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$
y er målevektoren med r målinger	$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}$
w er en vektor med tilfeldig hvit prosess-støy	$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$

v er en vektor med tilfeldig hvit målestøy	$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_r \end{bmatrix}$

og:

A er systemmatrisen	nxn
B er pådragsmatrisen	nxm
G er prosesstøymatrise	Vanligvis settes G lik identitetsmatrisen I: $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
C er målematrisen	rxn
D er pådragsmatrisen som virker direkte på målingen	Vanligvis settes $D = [0]$
H er målestøymatrisen	Vanligvis settes $H = [0]$

[End of Task]

Task 19: Optimal Estimator

Tegn og forklar hvorfor Kalmanfilteret betegnes som en optimal estimator?

Svar:

Vi tar utgangspunkt i estimator-avviket (e_k):

$$e_k = x_k - \bar{x}_k$$

Kalmanfilteret er en optimal tilstandsestimator i den forstand at variansen til estimator-avviket blir minimalt.

$$\frac{\partial}{\partial K_k}\left(E\left[e_k e_k^T\right]\right) = 0$$

Vi definerer

$$P_k \equiv E\left[e_k e_k^T\right]$$

Merk P_k er en matrise (kovariansmatrise)

→ Dvs Kalmanfilter-algoritmen går ut på å løse følgende for hvert tidsskritt (setter den deriverte lik null for å finne minimum):

$$\frac{\partial P_k}{\partial K_k} = 0$$

Dette gir 2 likninger:

$$K_{k,opt} = f(A, C, R, P_k)$$

der P_k finnes fra følgende likning:

$$P_{k+1} = f(A, C, G, Q, R, P_k)$$

→ Dvs disse må løses rekursivt for hvert tidsskritt for å finne den optimale K i hvert tidsskritt.

→ Merk! Dette er matriselikninger

→ Der Q og R vil være Kalmanfilterets "tuningsparametre"

Q er autokovarians matrisen til prosess-støyen w

$$Q = E(ww^T)$$

$$p(w) \sim N(0, Q)$$

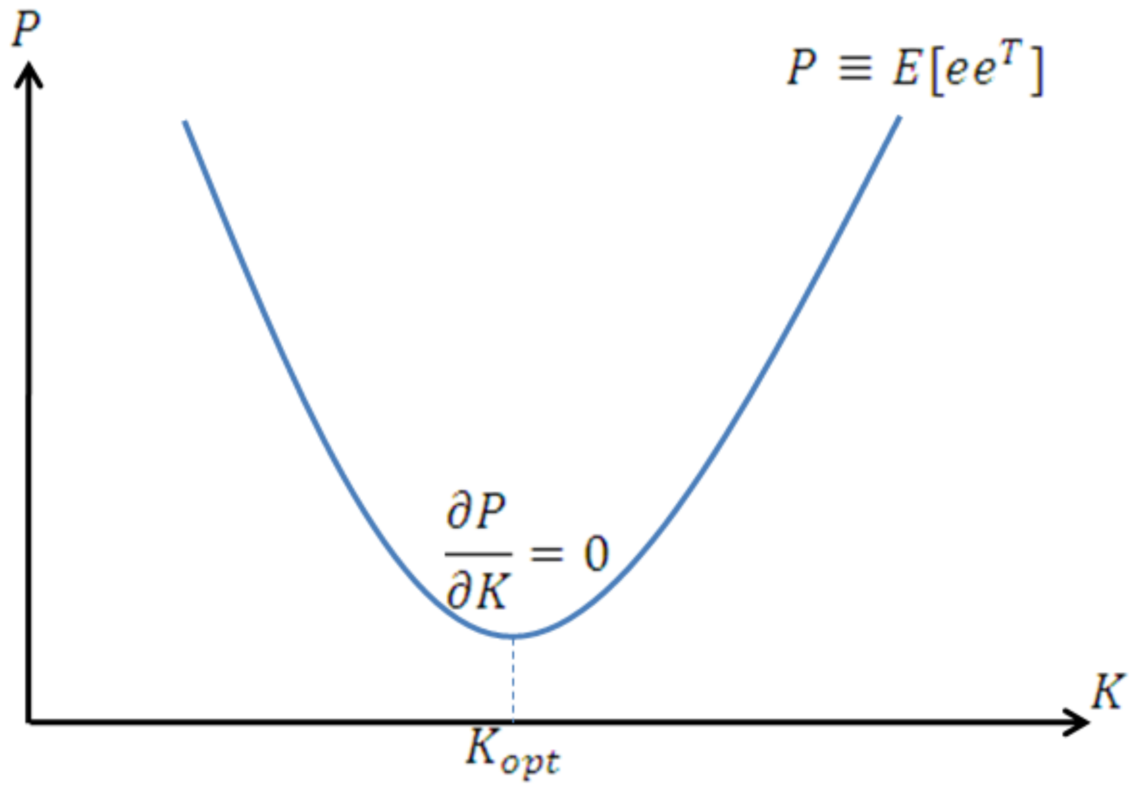
R er autokovarians matrisen til målestøyen v

$$R = E(vv^T)$$

$$p(v) \sim N(0, R)$$

→ dvs. disse gir en statistisk beskrivelse av hvordan støyen i systemet varierer.

Den optimale løsningen kan illustreres slik:



NB! Dette er en enkel skisse for å illustrere prinsippet, da K og P er matriser (multidimensjonalt) vil det i praksis være mer komplisert å skissere dette.

[End of Task]

Task 20: Testing av Kalmanfilter

Det lønner seg å teste ut Kalmanfilteret på en simulert prosess før du tar det i bruk på den virkelige prosessen. Du kan bruke f.eks. bruke LabVIEW, MATLAB eller andre simulerings- og programmeringsspråk.

Forklar hvordan du vil teste dette

Svar:

Du bør teste på følgende måte:

1. Simulering: Du bør teste ut på en modell med både prosess- og målestøy
2. Modellfeil: Du bør innføre noen modellfeil ved å forandre den simulerte prosessen litt – dette for å sjekke om Kalmanfilteret fremdeles gir brukbare estimater selv om modellen ikke er riktig.

[End of Task]

Task 21: Observerbarhet

En nødvendig betingelse for at Kalmanfilteret skal virke ordentlig er at systemet er observerbart. Forklar dette begrepet og sett opp Observerbarhetsmatrisen.

Svar:

Gitt følgende diskrete og lineære tilstandsrommodell:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = Cx_k + Du_k$$

Observerbarhetsmatrisen er definert som:

$$\boxed{O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}$$

hvor n er systemets orden, dvs. antall tilstander i tilstandsrommodellen.

→ Et system med orden n er observerbart hvis O har full rang, dvs rangen til O er lik n.

$$rang(O) = n \rightarrow Observerbart$$

→ Rangen kan sjekkes ved å finne determinanten til O. Hvis determinanten er ulik null, har O full rang og systemet er dermed observerbart.

$$\det(O) \neq 0 \rightarrow Observerbart$$

[End of Task]

Task 22: Kovariansmatrisene Q og R

Forklar disse kovariansmatrisene Q og R

Svar:

Q er autokovarians matrisen til prosess-støyen w

$$Q = E(ww^T)$$

$$p(w) \sim N(0, Q)$$

R er autokovarians matrisen til målestøyen v

$$R = E(vv^T)$$

$$p(v) \sim N(0, R)$$

→ dvs. disse gir en statistisk beskrivelse av hvordan støyen i systemet varierer.

$\boldsymbol{Q}$ **er autokovarians matrisen til prosess-støyen** $\boldsymbol{w}$ $Q = E(ww^T)$ $E\{w\}$ er forventningsverdien ("middelverdien") til prosess-støy vektoren w.	Vanligvis antar vi at Q er en diagonalmatrise: $Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{nn} \end{bmatrix}$ der q_{ii} er variansen til w_i
$\boldsymbol{R}$ **er autokovarians matrisen til målestøyen** $\boldsymbol{v}$ $R = E(vv^T)$ $E\{v\}$ er forventningsverdien ("middelverdien") til målestøy vektoren v.	Vanligvis antar vi at R er en diagonalmatrise: $R = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{rr} \end{bmatrix}$ der r_{ii} er variansen til v_i

→ Q og R brukes som "tuningsparametre" ("vektmatriser") i Kalmanfilteret, nesten på samme måte som vi bruker P, I og D som tuningparametre i en PID regulator.

NB! Hvis vi antar at de enkelte støykomponentene ikke påvirker hverandre blir Q og R diagonalmatriser.

[End of Task]

Task 23: Tuning av Kalmanfilteret

Forklar hvordan du kan bruke $\boldsymbol{Q}$ og $\boldsymbol{R}$ til å "tune" Kalmanfilteret

Svar:

Q og R brukes som "tuningsparametre" ("vektmatriser") i Kalmanfilteret, nesten på samme måte som vi bruker P, I og D som tuningparametre i en PID regulator.

PID regulator	**Kalmanfilter**
P I D	Q R

For å finne (stasjonær) K trengs følgende matriser: A, G, C, Q and R

Som vi ser, så avhenger er Kalmanfilter forsterkningen av Q og R, dvs vi bruker disse som ”tuningsparametre” i Kalmanfilteret.

Q er autokovarians matrisen til prosess-støyen w

R er autokovarians matrisen til målestøyen v

R kan enkelt beregnes fra en tidsserie med målinger ved å bruke en varians funksjon i f.eks LabVIEW eller MathScript. Det er også vanlige for kommersielle måleinstrumenter at denne er oppgitt fra leverandøren sin side.

Jo større Q, jo større Kalmanfilter-forsterkning og sterkere oppdatering av estimatene, men det gjør at estimatene blir mer støyfylte. Så vi må ha en gylden middelvei.

Så hovedregelen er:

Velg Q så stor som mulig uten at estimatene blir for støyfylte.

Som nevnt tidligere kan vi definere Q slik:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q_{11}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{q_{22}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{q_{nn}} \end{bmatrix}$$

der verdien q_{11} vil påvirke tilstandsestimatet $\bar{x}_1$, q_{22} vil påvirke tilstandsestimatet $\bar{x}_2$, osv.

[End of Task]

Task 24: Stasjonær Kalmanfilter forsterkning

1 Hva menes med den stasjonære Kalmanfilter forsterkningen?

2 Hva slags informasjon er nødvendig for å finne/beregne den stasjonære Kalmanfilter forsterkningen?

Svar:

K vil variere med tiden, men da det er ”regnekrevende” å gjøre dette, brukes vanligvis den stasjonere verdien av K, kalt K_s.

Det stasjonære forholdet finner vi ved $P_{k+1} = P_k = P_\infty$ som gir en stasjonær K.

For å finne (stasjonær) K trengs følgende matriser: A, G, C, Q and R

I MathScript/MATLAB og LabVIEW finnes det ferdige funksjoner for dette.

[End of Task]

2.2 Kalmanfilter algoritmer

Task 25: Den generelle Kalmanfilter algoritmen

Sett opp de forskjellige stegene i Kalmanfilter-algoritmen og tegn et blokkdigram. Forklar blokkdiagrammet.

Svar:

Det eksisterer flere versjoner av Kalmanfilter algoritmen. Her bruker vi en oppdatert versjon. Kalmanfilter algoritmen som vi ønsker å implementere i en datamaskin er som følger:

Finn stasjonær Kalman forsterkning K. K varierer med tiden, men vanligvis kan vi bruke den stasjonære versjonen av K.

Finn det innledende tilstandsestimatet

$$\bar{x}_0 = x_0$$

Steg 1: Finn måleestimatet

Generelt:

$$\boxed{\bar{y}_k = g(\bar{x}_k, u_k)}$$

For lineære systemer:

$$\boxed{\bar{y}_k = C\bar{x}_k + Du_k}$$

Steg 2: Finn estimator-avviket

$$\boxed{e_k = y_k - \bar{y}_k}$$

Steg 3: Finn det korrigerte tilstandsestimatet

$$\boxed{\hat{x}_k = \bar{x}_k + Ke_k}$$

Steg 4: Finn det predikerte (fremtidige) tilstandsestimatet

Generelt:

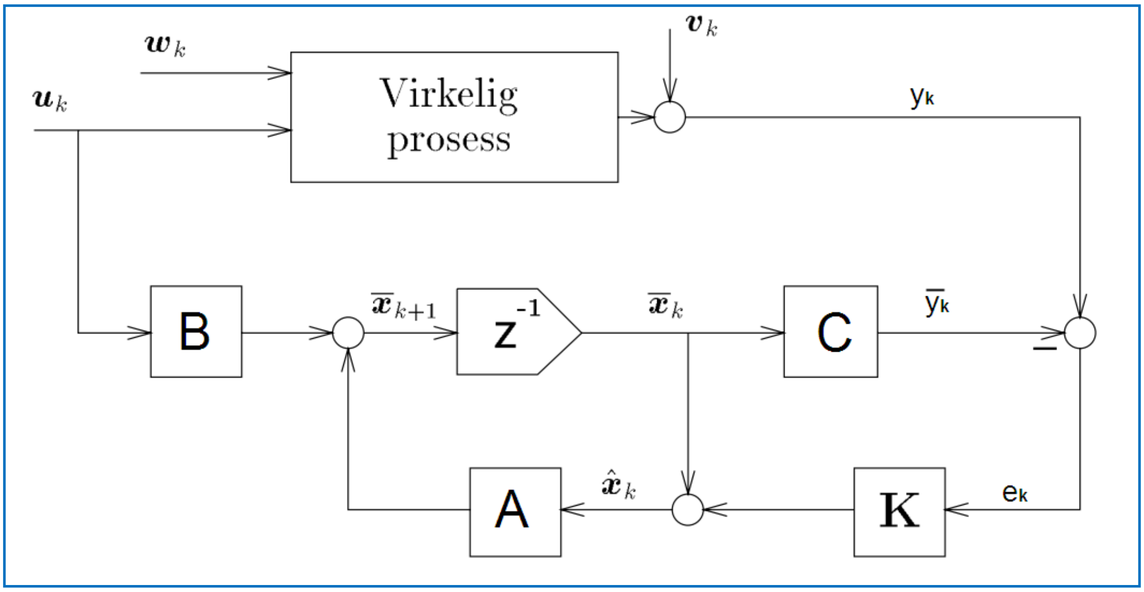
$$\boxed{\bar{x}_{k+1} = f(\hat{x}_k, u_k)}$$

For lineære systemer:

$$\boxed{\bar{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k}$$

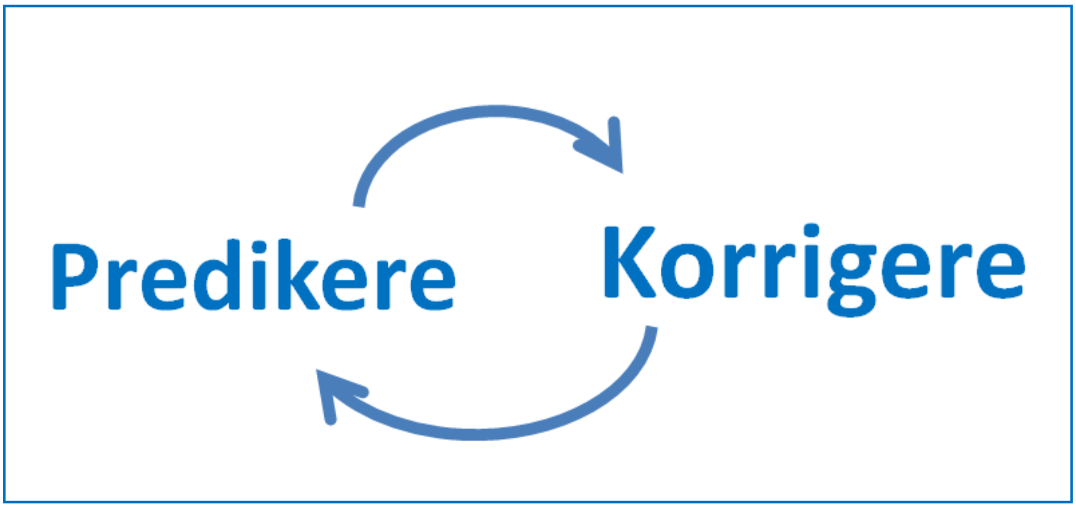
Steg 1- 4 går i loop i et dataprogram

Dette kan skisseres slik i et blokkdiagram:



→ Vi ser at Kalmanfilteret inneholder en modell som går i parallell med den virkelige prosessen. Kalmanfilter modellen skal altså gjengi den virkelige prosessen. Det er derimot umulig å modellere helt nøyaktig, og i tillegg vil prosessen alltid være utsatt for støy. Derfor ser vi at modellen blir oppdatert ved at differansen mellom virkelig og estimert måling multipliseres med Kalmanfilter forsterkningen K.

Hovedprinsippet med Kalmanfilteret kan illustreres slik:



→ Dvs. følgende skjer i en "evig" løkke i Kalmanfilter algoritmen:

- Prediksjon av ny tilstand
- Oppdatere/Korrigere med siste måling

[End of Task]

Task 26: Ulike typer algoritmer

Nevn 2 forskjellige Kalmanfilter-algoritmer og hva som er forskjellen på disse? Tegn blokkdiagram for disse.

Svar:

Vi opererer med to forskjellige estimater:

$\bar{x}$ **- apriori-estimatet**. Beregnes før nåværende måling er tatt. Kalles også "Time Update" estimat eller Predikert estimat.

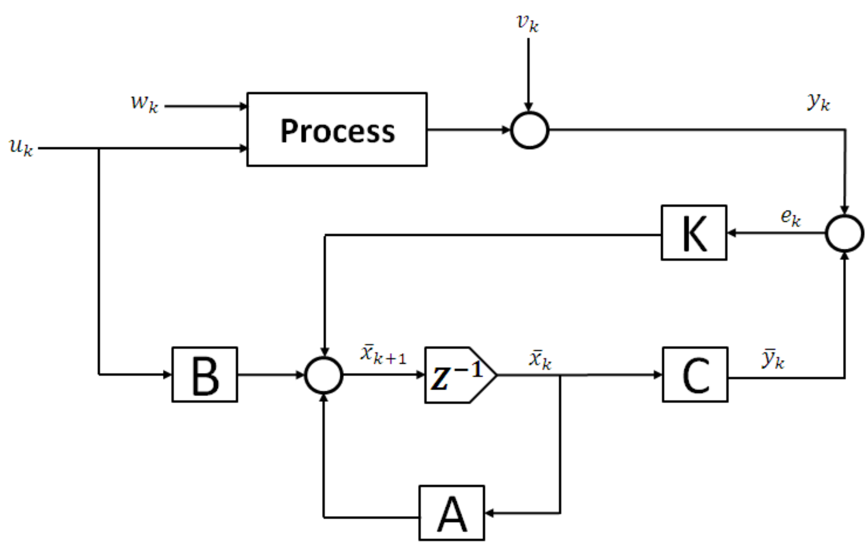
$\hat{x}$ – **aposteriori-estimatet**. Beregnes etter at nåværende måling er tatt. Kalles også "Measurement Update" estimat eller "Corrected" estimat.

Prediktor-type:

Dette er den opprinnelige versjonen. Denne typen skiller ikke mellom apriori-estimatet ($\bar{x}$) og aposteriori-estimatet ($\hat{x}$), dvs det er samme variabel.

Ulempe: Det er en tidsforsinkelse på et tidsskritt mellom $y(k)$ og $\bar{x}(k+1)$.

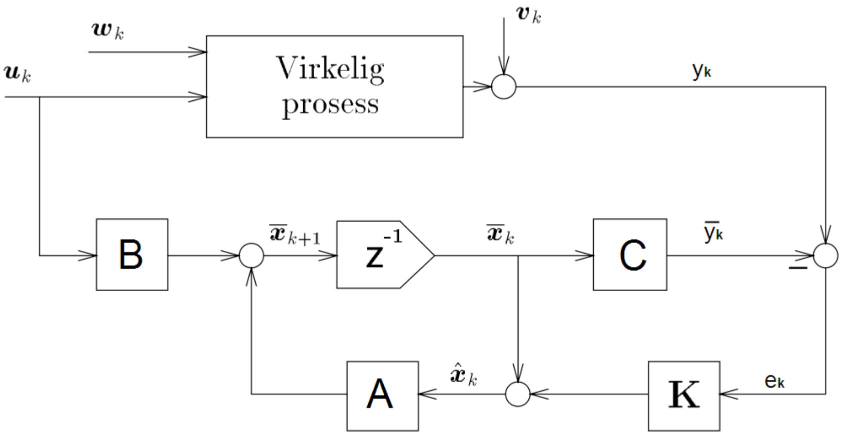
Blokkdiagram:



Prediktor-korrektor-type:

Dette er en oppdatert versjon av algoritmen. Denne typen skiller mellom apriori-estimatet ($\bar{x}$) og aposteriori-estimatet ($\hat{x}$), Dette er den mest vanlige i praktiske anvendelser i dag.

Blokkdiagram:



[End of Task]

Task 27: Kalmanfilter-algoritmen for gitt system

Gitt følgende system:

$$\dot{x}_1 = K_p u - x_2$$

$$\dot{x}_2 = 0$$

$$y = x_1$$

hvor K_p er pumpeforsterkningen

Sett systemet opp på formen:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Svar:

Vi får:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_p \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_{\mathrm{D}} u$$

Lag en diskret versjon av systemet vha Euler forover.

$$\dot{x} \approx \frac{x(k+1) - x(k)}{T_s}$$

Svar:

Diskret versjon:

$$x_1(k+1) = x_1(k) + T_s K_p u(k) - T_s x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k)$$

$$y(k) = x_1(k)$$

Vi kan også sette det diskrete systemet opp på formen:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = Cx_k + Du_k$$

som blir:

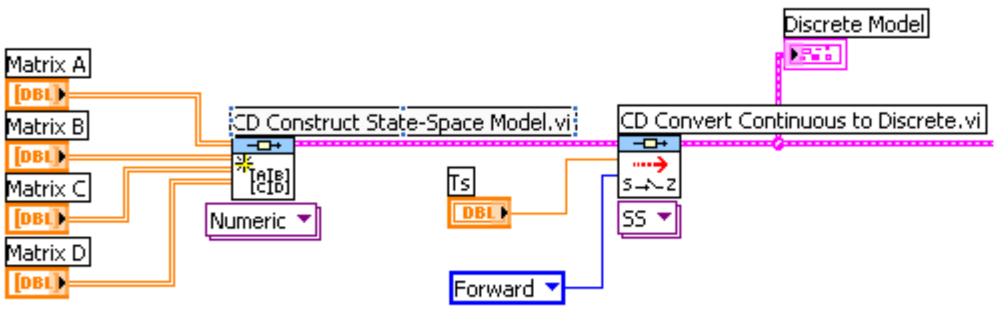
$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} T_s K_p \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(k)$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_{\mathrm{D}} u(k)$$

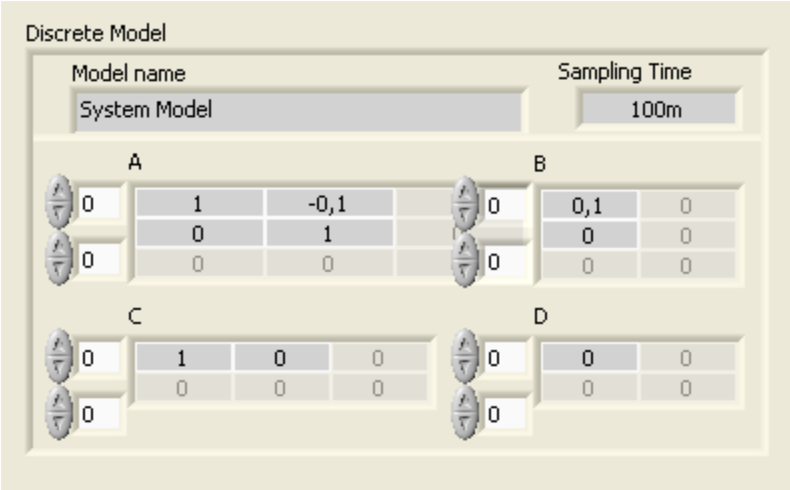
Sjekk svaret vha LabVIEW.

Svar:

I LabVIEW kan du gjøre følgende:



Svaret blir:



Har brukt følgende: $K_p = 1$ og $T_s = 0.1$

Sjekk om systemet er observerbart (penn og papir).

Svar:

Observerbarhetsmatrisen er definert som:

$$\boxed{\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA^{n-1}} \end{bmatrix}}$$

hvor n er systemets orden, dvs. antall tilstander i tilstandsrommodellen.

→ Et system med orden n er observerbart hvis O har full rang, dvs rangen til O er lik n.

$$rang(O) = n \rightarrow Observerbart$$

→ Rangen kan sjekkes ved å finne determinanten til O. Hvis determinanten er ulik null, har O full rang og systemet er dermed observerbart.

$$\det(O) \neq 0 \rightarrow Observerbart$$

Vi får da:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$$

der:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Får da:

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -T_s \end{bmatrix}$$

Observerbarhetsmatrisen blir da:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -T_s \end{bmatrix}$$

Finner determinanten:

$$\det(O) = -T_s$$

Vi ser at:

$$\det(O) \neq 0 \rightarrow Observerbart$$

4 Sett opp likningene i Kalmanfilter-algoritmen for dette systemet.

Den generelle algoritmen er som følger:

Steg 1: Finn måleestimatet

$$\bar{y}_k = g(\bar{x}_k, u_k)$$

Steg 2: Finn estimator-avviket

$$e_k = y_k - \bar{y}_k$$

Steg 3: Finn det korrigerte tilstandsestimatet

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + Ke_k$$

Steg 4: Finn det predikerte (fremtidige) tilstandsestimatet

$$\bar{x}_{k+1} = f(\hat{x}_k, u_k)$$

Svar:

K er en (nxr) matrise, så K blir som følger:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}$$

Basert på den diskrete versjonen av systemet vårt og den generelle algoritmen får vi følgende algoritme for vårt system:

Steg 1: Finn måleestimatet

$$\bar{y}(k) = \bar{x}_1(k)$$

Steg 2: Finn estimator-avviket

$$e(k) = y(k) - \bar{y}(k)$$

Steg 3: Finn det korrigerte tilstandsestimatet

$$\hat{x}_1(k) = \bar{x}_1(k) + K_1 e(k)$$

$$\hat{x}_2(k) = \bar{x}_2(k) + K_2 e(k)$$

Steg 4: Finn det predikerte (fremtidige) tilstandsestimatet

$$\bar{x}_1(k+1) = \hat{x}_1(k) + T_s K_p u(k) - T_s \hat{x}_2(k)$$

$$\bar{x}_2(k+1) = \hat{x}_2(k)$$

- Disse stegene (1-4) går i loop og beregner nye estimater for hvert tidsskritt.

5 Finn den statiske Kalman forsterkningen (K_s) vha LabVIEW. Sjekk også om systemet er observerbart.

Du kan bruke følgende kovariansmatriser:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, R = 0.01$$

Tips! Følgende funksjoner i LabVIEW er kjekke å bruke:

- ”CD Contruct State-Space Model.vi”
- ”CD Convert Continuous to Discrete.vi”
- ”CD Observability Matrix.vi”
- ”CD Kalman Gain.vi”

Du kan også bruke følgende:

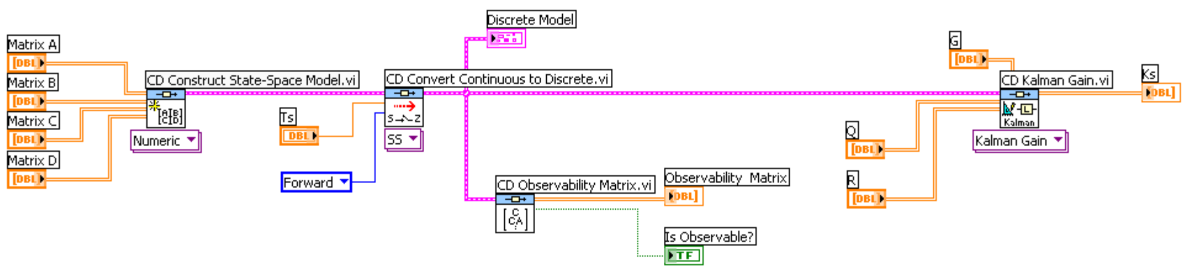
$$K_p = 1$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

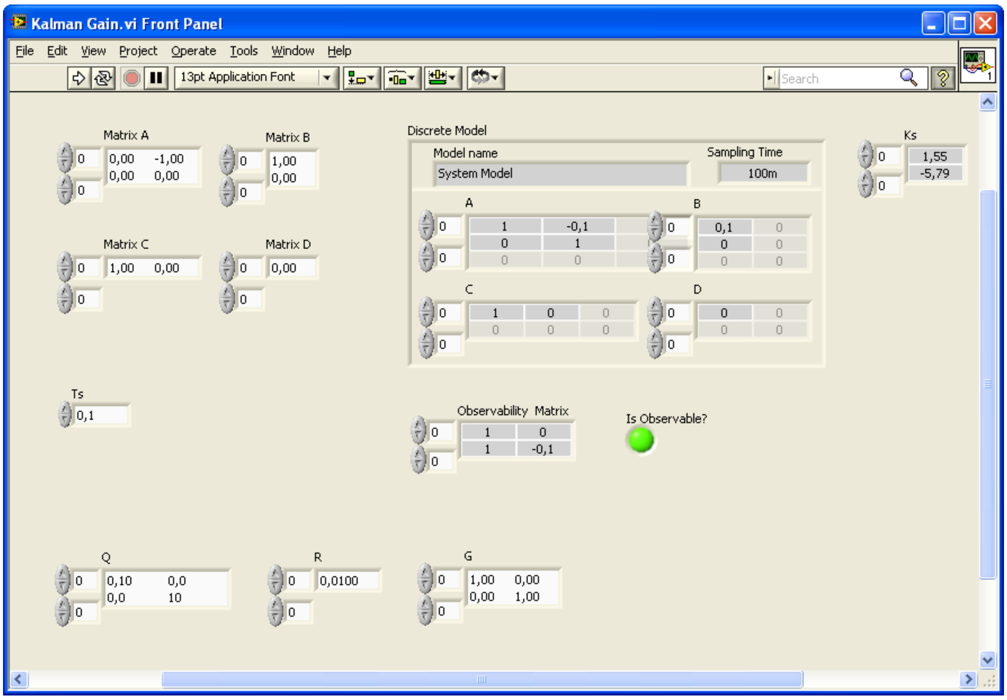
Svar:

LabVIEW programmet blir som følger:

Blokkdiagram:



Frontpanel:



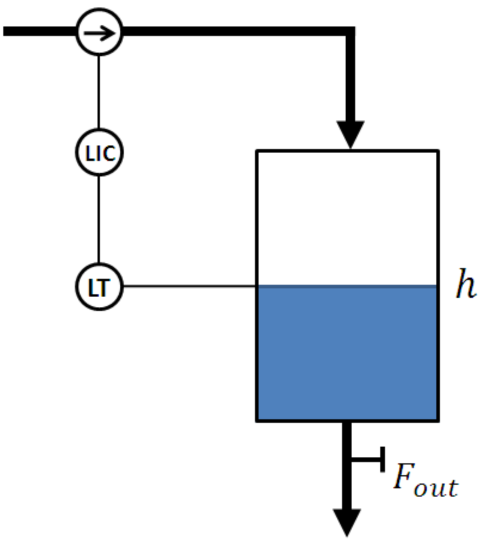
Som du ser av frontpanelet over så blir den statiske Kalman-forsterkningen som følger:

$$K = \begin{bmatrix} 1.55 \\ -5.79 \end{bmatrix}$$

[End of Task]

Task 28: Kalmanfilter-algoritmen for vanntanken

→ Sett opp likningene i Kalmanfilter-algoritmen for vanntanken basert på det diskrete systemet funnet i en tidligere oppgave.



Den generelle algoritmen er som følger:

Steg 1: Finn måleestimatet

$$\bar{y}_k = g(\bar{x}_k, u_k)$$

Steg 2: Finn estimator-avviket

$$e_k = y_k - \bar{y}_k$$

Steg 3: Finn det korrigerte tilstandsestimatet

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + Ke_k$$

Steg 4: Finn det predikerte (fremtidige) tilstandsestimatet

$$\bar{x}_{k+1} = f(\hat{x}_k, u_k)$$

Svar:

Vi tar utgangspunkt i systemet vårt:

Systemet er gitt ved:

$$x_1(k+1) = x_1(k) - \frac{T_s}{A_t}x_2(k) + \frac{T_sK_p}{A_t}u(k)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k)$$

$$y(k) = x_1(k)$$

K er en (nxr) matrise, så K blir som følger:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}$$

Kalmanfilter algoritmen for vårt system blir da:

Initialverdier: $\bar{x}_1(0), \bar{x}_2(0)$

Steg 1: Finn måleestimatet

$$\bar{y}(k) = \bar{x}_1(k)$$

Steg 2: Finn estimator-avviket

$$e(k) = y(k) - \bar{y}(k)$$

Steg 3: Finn det korrigerte tilstandsestimatet

$$\hat{x}_1(k) = \bar{x}_1(k) + K_1e(k)$$

$$\hat{x}_2(k) = \bar{x}_2(k) + K_2e(k)$$

Steg 4: Finn det predikerte (fremtidige) tilstandsestimatet

$$\bar{x}_1(k+1) = \hat{x}_1(k) - \frac{T_s}{A_t}\hat{x}_2(k) + \frac{T_s K_p}{A_t}u(k)$$

$$\bar{x}_2(k+1) = \hat{x}_2(k)$$

Merk! Forskjellig notasjon kan brukes, merk at: $\bar{x} = x_p$ og $\hat{x} = x_c$

[End of Task]

Task 29: Dynamisk system

Gitt følgende system:

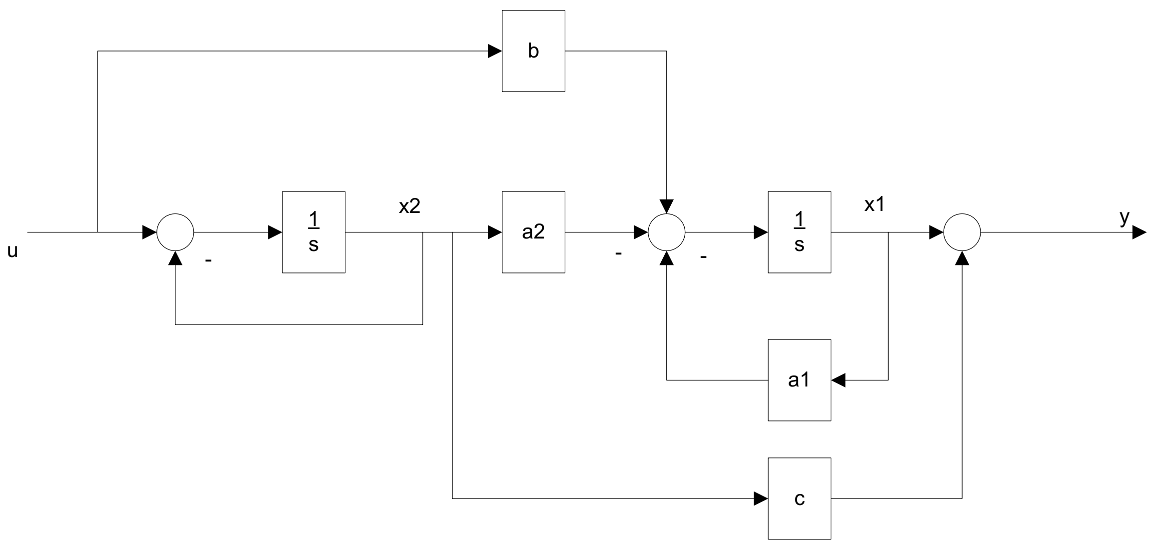
$$\dot{x}_1 = -a_1 x_1 - a_2 x_2 + bu$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$

$$y = x_1 + cx_2$$

1 Tegn et blokkdiagram for systemet

Svar:



2 Finn Observerbarhetsmatrisen for systemet.

Svar:

Gitt:

$$\dot{x}_1 = -a_1 x_1 - a_2 x_2 + bu$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$

$$y = x_1 + cx_2$$

Tilstandsrommodell:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Dette gir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Observerbarhetsmatrisen er definert som:

$$\boxed{\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA^{n-1}} \end{bmatrix}}$$

hvor n er systemets orden, dvs. antall tilstander i tilstandsrommodellen.

3 **Sjekk om systemet er Observerbart. Sett $\boldsymbol{a_1 = 5, a_2 = 2, b = 1, c = 1}$**

Svar:

Observerbarhetsmatrisen er definert som:

$$\boxed{\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA^{n-1}} \end{bmatrix}}$$

hvor n er systemets orden, dvs. antall tilstander i tilstandsrommodellen.

→ Et system med orden n er observerbart hvis O har full rang, dvs rangen til O er lik n.

$$rang(O) = n \rightarrow Observerbart$$

→ Rangen kan sjekkes ved å finne determinanten til O. Hvis determinanten er ulik null, har O full rang og systemet er dermed observerbart.

$$\det(O) \neq 0 \rightarrow Observerbart$$

Vi får da:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$$

der:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & c \end{bmatrix}$$

Får da:

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & (-c - a_2) \end{bmatrix}$$

Observerbarhetsmatrisen blir da:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c \\ -a_1 & -c - a_2 \end{bmatrix}$$

Finner determinanten:

$$\det(O) = c\, a_1 - c - a_2$$

Vi setter $a_1 = 5, a_2 = 2, b = 1, c = 1$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & c \\ -a_1 & -c - a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det(O) = 2$$

Vi ser at

$$\det(O) \neq 0 \rightarrow Observerbart$$

Sjekker om svaret er riktig vha **MathScript**:

```
clear, clc

a1 = 5;
a2 = 2;
b = 1;
c = 1;

A = [-a1 -a2; 0 -1];
B = [b 1]';
C = [1 c];
D = [0];

ssmodel = ss(A, B, C, D);

O = obsvmx(ssmodel)

rank(O)

det(O)
```

→ Svaret blir det samme.

4 Lag en diskret versjon av systemet vha Euler forover.

$$\dot{x} \approx \frac{x(k+1) - x(k)}{T_s}$$

Svar:

Vi tar utgangpunkt i det kontinuerlige systemet:

$$\dot{x}_1 = -a_1 x_1 - a_2 x_2 + bu$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$

$$y = x_1 + c x_2$$

Vi diskretiserer vha Euler forover:

$$\frac{x_1(k+1) - x_1(k)}{T_s} = -a_1 x_1(k) - a_2 x_2(k) + bu(k)$$

$$\frac{x_2(k+1) - x_2(k)}{T_s} = -x_2(k) + u(k)$$

$$y(k) = x_1(k) + c x_2(k)$$

som gir:

$$x_1(k+1) = x_1(k) - T_s a_1 x_1(k) - T_s a_2 x_2(k) + T_s b u(k)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) - T_s x_2(k) + T_s u(k)$$

$$y(k) = x_1(k) + c x_2(k)$$

videre:

$$x_1(k+1) = (1 - T_s a_1) x_1(k) - T_s a_2 x_2(k) + T_s b u(k)$$

$$x_2(k+1) = (1 - T_s) x_2(k) + T_s u(k)$$

$$y(k) = x_1(k) + c x_2(k)$$

Dette gir følgende diskrete system:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (1 - T_s a_1) & -T_s a_2 \\ 0 & (1 - T_s) \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} T_s b \\ T_s \end{bmatrix}}_{B} u(k)$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & c \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} u(k)$$

Innsatt for følgende verdier $a_1 = 5, a_2 = 2, b = 1, c = 1$ og $T_s = 0.1$ får vi:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & -0.2 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}}_{B} u(k)$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_{\mathrm{D}} u(k)$$

5 **Bruk MathScript/LabVIEW for å verifisere svaret ditt. Sett $T_s = 0.1$.**

Svar:

MathScript kode:

```
clear, clc

a1 = 5;
a2 = 2;
b = 1;
c = 1;

A = [-a1 -a2; 0 -1];
B = [b 1]';
C = [1 c];
D = [0];

ssmodel = ss(A, B, C, D);


% Discrete System:
Ts = 0.1;
ssmodel_discete = c2d(ssmodel, Ts, 'forward')
```

→ Resultatet blir det samme

6 **Sett opp likningene i Kalmanfilter-algoritmen for dette systemet.**

Den generelle algoritmen er som følger:

Steg 1: Finn måleestimatet

$$\bar{y}_k = g(\bar{x}_k, u_k)$$

Steg 2: Finn estimator-avviket

$$e_k = y_k - \bar{y}_k$$

Steg 3: Finn det korrigerte tilstandsestimatet

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + Ke_k$$

Steg 4: Finn det predikerte (fremtidige) tilstandsestimatet

$$\bar{x}_{k+1} = f(\hat{x}_k, u_k)$$

Svar:

Vi tar utgangspunkt i systemet vårt:

Systemet er gitt ved:

$$x_1(k+1) = (1 - T_s a_1)x_1(k) - T_s a_2 x_2(k) + T_s bu(k)$$

$$x_2(k+1) = (1 - T_s)x_2(k) + T_s u(k)$$

$$y(k) = x_1(k) + cx_2(k)$$

K er en (nxr) matrise, så K blir som følger:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}$$

Kalmanfilter algoritmen for vårt system blir da:

Initialverdier: $\bar{x}_1(0), \bar{x}_2(0)$

Steg 1: Finn måleestimatet

$$\bar{y}(k) = \bar{x}_1(k) + c\bar{x}_2(k)$$

Steg 2: Finn estimator-avviket

$$e(k) = y(k) - \bar{y}(k)$$

Steg 3: Finn det korrigerte tilstandsestimatet

$$\hat{x}_1(k) = \bar{x}_1(k) + K_1 e(k)$$

$$\hat{x}_2(k) = \bar{x}_2(k) + K_2 e(k)$$

Steg 4: Finn det predikerte (fremtidige) tilstandsestimatet

$$\bar{x}_1(k+1) = (1 - T_s a_1)\hat{x}_1(k) - T_s a_2 \hat{x}_2(k) + T_s bu(k)$$

$$\bar{x}_2(k+1) = (1 - T_s)\hat{x}_2(k) + T_s u(k)$$

Disse 4 stegene vil gå i en løkke i et dataprogram.

Merk! Forskjellig notasjon kan brukes, merk at: $\bar{x} = x_p$ og $\hat{x} = x_c$

[End of Task]

3 Observer

Her er noen utvalgte oppgaver ifm bruka av Observer som tilstandsestimator.

Task 30:	Observer

Forklar prinsippene for en Observer.

Svar:

Prosess

Vi tar utgangspunkt i følgende system (virkelig prosess):

$$\dot{x} = Ax + Bu + w$$

$$y = Cx + Du + v$$

der w er prosess-støy og v er målestøy.

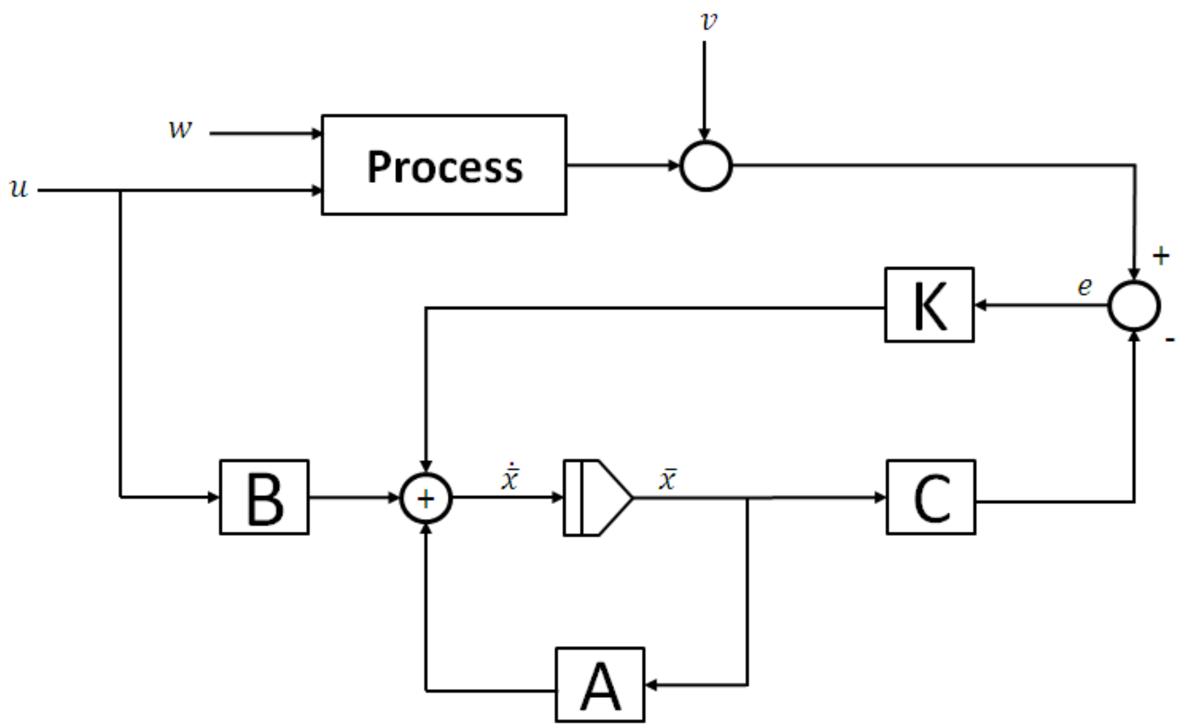
Estimator

Observeren (estimatoren) vil da ha følgende struktur:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu + K(y - \bar{y})$$

$$\bar{y} = C\bar{x} + Du$$

Da kan vi tegne Observeren på følgende måte:



Innsatt får vi følgende:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu + K(y - (C\bar{x} + Du))$$

$$\bar{y} = C\bar{x} + Du$$

dette blir:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu + Ky - KC\bar{x} - KDu$$

$$\bar{y} = C\bar{x} + Du$$

Tilslutt får vi:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \underbrace{(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{KC})}_{\boldsymbol{A_e}}\bar{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{KD})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{Ky}$$

$$\bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{Du}$$

Dvs. systemmatrisen til Observeren (estimatoren) blir

$$\boxed{\boldsymbol{A_e} \equiv \boldsymbol{A} - \boldsymbol{KC}}$$

[End of Task]

Task 31: Alternativer - Observers

Fordeler/ulemper Kalmanfilter/"Observers"?

Svar:

- Teori og implementering for "Observers" er enklere enn for Kalmanfilter
- Det er ikke rett frem å implementere "Observers" for systemer som har flere enn en måling, dette er derimot rett frem ifm Kalmanfilter
- Observers tar ikke hensyn til støyforholdene

[End of Task]

Task 32: Butterworth polynom – 2. orden

En enkel måte å finne egenverdiene på er å bruke **Butterworth** egenverdiene fra Butterworth polynomet.

Gitt:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Finn Observerforsterkningsmatrisen K (penn og papir).

Svar:

Et 2.ordens Butterworth polynom er definert som:

$$B_2(s) = a_2 s^2 + a_1 s + 1$$

hvor $a_0 = 1, a_1 = \sqrt{2}T, a_2 = T^2$.

Dette gir:

$$\boxed{B_2(s) = T^2 s^2 + \sqrt{2}Ts + 1}$$

Observerforsterkningen $K\ (n\, x\, r)$ er:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

Systemmatrisen til Observeren blir:

$$A - KC = \begin{bmatrix} a_1 - k_1 & 1 \\ a_2 - k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Den karakteristiske likning blir:

$$\det\big(sI - (A - KC)\big) = \begin{vmatrix} s + k_1 - a_1 & -1 \\ k_2 - a_2 & s \end{vmatrix} = s^2 + (k_1 - a_1)s + k_2 - a_2$$

Et 2.ordens Butterworth filter har følgende karakteriske polynom:

$$B_2(s) = T^2 s^2 + \sqrt{2} T s + 1 = T^2 (s^2 + \frac{\sqrt{2}}{T} s + \frac{1}{T^2})$$

Butterworthfilterets karakteriske polynom og Observerens karakteristiske polynom på samme form, og vi kan sammenligne ledd for ledd:

$$k_1 - a_1 = \frac{\sqrt{2}}{T}, \qquad k_2 - a_2 = \frac{1}{T^2}$$

Dette gir:

$$k_1 = a_1 + \frac{\sqrt{2}}{T}$$

$$k_2 = a_2 + \frac{1}{T^2}$$

Observerforsterkningsmatrisen K blir dermed:

$$\underline{K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + \frac{\sqrt{2}}{T} \\ a_2 + \frac{1}{T^2} \end{bmatrix}}$$

Med innsatte verdier:

Vi har at:

$$T_r \approx nT \leftrightarrow T = \frac{T_r}{n}$$

Vi setter, for eksempel (for enkelhetens skyld) $T_r = 2s$ samt at $n = 2$ (n er lik antall tilstander).

Dette gir:

$$T = \frac{2\text{s}}{2} = \underline{1\text{s}}$$

Vi setter også: $a_1 = 1, a_2 = 1$ og får:

$$K = \begin{bmatrix} a_1 + \frac{\sqrt{2}}{T} \\ a_2 + \frac{1}{T^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.41 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Bruk MathScript og Ackerman (funksjonen heter acker()) og finn Observerforsterkningsmatrisen K vha denne. Sammenlign resultatet med dine utregninger.

Svar:

MathScript kode:

```
clear, clc

a1=1;
a2=1;

A = [a1, 1; a2, 0];
C = [1, 0];

n=2;
Tr=2;

T=Tr/n;
B2=[T*T, 1.4142*T, 1];

eigenvalues=roots(B2);
K=acker(A,C,eigenvalues,'o') %o for observer
```

Dette gir følgende resultat:

```
K =

    2.4142

    2
```

→ Vi ser at vi får samme svar i MathScript som ved våre manuelle beregninger.

[End of Task]

Task 33: Butterworth polynom – 3. orden

En enkel måte å finne egenverdiene på er å bruke **Butterworth** egenverdiene fra Butterworth polynomet.

Gitt:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 \\ a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bruk et 3.ordens Butterworth filter og finn K (penn og papir).

Svar:

Tilsvarende som forrige oppgave.

Systemmatrisen til Observeren blir:

$$A - KC = \begin{bmatrix} a_1 - k_1 & 1 & 0 \\ a_2 - k_2 & 0 & 1 \\ a_3 - k_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Den karakteristiske likning blir:

$$\det\big(sI - (A - KC)\big) = \begin{vmatrix} s + k_1 - a_1 & -1 & 0 \\ k_2 - a_2 & s & -1 \\ k_3 - a_3 & 0 & s \end{vmatrix} = s^3 + (k_1 - a_1)s^2 + (k_2 - a_2)s + k_3 - a_3$$

Et 3.ordens Butterworth filter har følgende karakteriske polynom:

$$B_3(s) = T^3 s^3 + 2T^2 s^2 + 2Ts + 1 = T^3(s^3 + \frac{2}{T}s^2 + \frac{2}{T^2}s + \frac{1}{T^3})$$

Butterworthfilterets karakteriske polynom og Observerens karakteristiske polynom er nå på samme form, og vi kan sammenligne ledd for ledd:

$$k_1 - a_1 = \frac{2}{T}, \qquad k_2 - a_2 = \frac{2}{T^2}, \qquad k_3 - a_3 = \frac{1}{T^3}$$

Dette gir:

$$k_1 = a_1 + \frac{2}{T}$$

$$k_2 = a_2 + \frac{2}{T^2}$$

$$k_3 = a_3 + \frac{1}{T^3}$$

Observerforsterkningsmatrisen K blir dermed:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + \frac{2}{T} \\ a_2 + \frac{2}{T^2} \\ a_3 + \frac{1}{T^3} \end{bmatrix}$$

Med innsatte verdier:

Vi har at:

$$T_r \approx nT \leftrightarrow T = \frac{T_r}{n}$$

Vi setter, for eksempel (for enkelhetens skyld) $T_r = 3s$ samt at $n = 3$ (n er lik antall tilstander).

Dette gir:

$$T = \frac{3\text{s}}{3} = \underline{1\text{s}}$$

Vi setter også: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1$ og får:

$$K = \begin{bmatrix} a_1 + \frac{2}{T} \\ a_2 + \frac{2}{T^2} \\ a_3 + \frac{1}{T^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2 Bruk MathScript og Ackerman (funksjonen heter acker()) og finn Observerforsterkningsmatrisen K vha denne. Sammenlign resultatet med dine utregninger.

Svar:

MathScript kode:

```
clear, clc

a1=1;
a2=1;
a3=1;

A = [a1, 1, 0; a2, 0, 1; a3, 0, 0];
C = [1, 0, 0];

n=3;
Tr=3;

T=Tr/n;
B3=[T^3, 2*T^2, 2*T, 1];

eigenvalues=roots(B3);

K = acker(A,C,eigenvalues,'o') %o for observer
```

Resultatet blir:

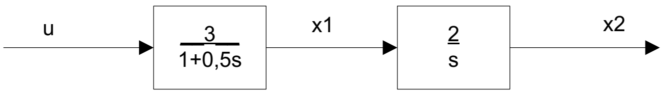
```
K =     3

        3

        2
```

→ Vi ser at vi får samme svar i MathScript som ved våre manuelle beregninger.

[End of Task]

Task 34: Blokkdiagram

Gitt følgende system:



Finn tilstandsrommodellen til systemet

Tips! Konverter systemet til en tilstandsrommodell på formen:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Tip! Bruk **Inverse Laplace**.

Sett $x_2 = y$

Svar:

Vi får:

$$\frac{x_1}{u} = \frac{3}{1 + 0.5s}$$

$$x_1(1 + 0.5) = 3u$$
$$x_1 + 0.5sx_1 = 3u$$

Inverse Laplace:

$$x_1 + 0.5\dot{x}_1 = 3u$$

Dette gir:

$$\underline{\dot{x}_1 = -2x_1 + 6u}$$

Deretter:

$$x_2 = \frac{2}{s}x_1$$

$$sx_2 = 2x_1$$

Inverse Laplace gir:

$$\underline{\dot{x}_2 = 2x_1}$$

Dette gir følgende tilstandsrommodell:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}6\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

2 Sjekk om systemet er Observerbart (penn og papir). Kontroller svaret vha MathScript.

Svar:

Observerbarhetsmatrisen er definert som:

$$\boxed{\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\\ \vdots\\ \boldsymbol{CA}^{\boldsymbol{n-1}}\end{bmatrix}}$$

hvor n er systemets orden, dvs. antall tilstander i tilstandsrommodellen.

→ Et system med orden n er observerbart hvis O har full rang, dvs rangen til O er lik n.

$$rang(O) = n \rightarrow Observerbart$$

→ Rangen kan sjekkes ved å finne determinanten til O. Hvis determinanten er ulik null, har O full rang og systemet er dermed observerbart.

$$\det(O) \neq 0 \rightarrow Observerbart$$

Observerbarhetsmatrisen blir:

$$O = \begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}$$

Vi får da:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix}-2 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}, \qquad \mathrm{C} = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix}$$

Dette blir:

$$O = \begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

Determinanten:

Slik finner vi determinanten for et 2x2 system:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\det(A) = |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}$$

Determinanten blir dermed:

$$\det(O) = -2$$

$$\det(O) \neq 0 \rightarrow Observerbart$$

MathScript:

```
clear, clc

% Define system
A = [-2, 0; 2, 0];
B = [6, 0]';
C = [0, 1];
D = [0];

ssmodel = ss(A, B, C, D);

O = obsvmx(ssmodel)

rank(O)

det(O)
```

→ Får samme svar, dvs systemet er observerbart.

3 Lag en diskret versjon av systemet vha Euler forover.

$$\dot{x} \approx \frac{x(k+1) - x(k)}{T_s}$$

Vi tar utgangspunkt i det kontinuerlige systemet:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + 6u$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1$$

$$y = x_2$$

Vi diskretiserer:

$$\frac{x_1(k+1) - x_1(k)}{T_s} = -2x_1(k) + 6u(k)$$

$$\frac{x_2(k+1) - x_2(k)}{T_s} = 2x_1$$

$$y(k) = x_2(k)$$

Videre:

$$x_1(k+1) = x_1(k) - 2T_s x_1(k) + 6T_s u(k)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + 2T_s x_1$$

$$y(k) = x_2(k)$$

Tilslutt:

$$x_1(k+1) = (1 - 2T_s)x_1(k) + 6T_s u(k)$$

$$x_2(k+1) = 2T_s x_1 + x_2(k)$$

$$y(k) = x_2(k)$$

Som gir:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 - 2T_s & 0 \\ 2T_s & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 6T_s \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(k)$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{\mathrm{D}} u(k)$$

Vi sjekker svaret vha MathScript (bruker $T_s = 0.1$):

```
clear, clc

% Define system
A = [-2, 0; 2, 0];
B = [6, 0]';
C = [0, 1];
D = [0];

ssmodel = ss(A, B, C, D);

Ts=0.1
ssmodel_disc = c2d(ssmodel, Ts, 'forward')
```

→ Vi får samme svar.

4 Sett opp likningene som inngår i Observeren basert på dette systemet.

Svar:

Den generelle Observer-algoritmen er som følger:

Steg 1: Finn måleestimatet

$$\bar{y}_k = g(\bar{x}_k, u_k)$$

For lineære systemer:

$$\bar{y}_k = C\bar{x}_k + Du_k$$

Steg 2: Finn estimator-avviket

$$e_k = y_k - \bar{y}_k$$

Steg 3: Finn det korrigerte og predikerte (fremtidige) tilstandsestimatet

$$\bar{x}_{k+1} = f(\bar{x}_k, u_k) + Ke_k$$

For lineære systemer

$$\bar{x}_{k+1} = A\bar{x}_k + Bu_k + Ke_k$$

Vi tar utgangspunkt i det diskrete systemet vi har funnet:

$$x_1(k+1) = (1 - 2T_s)x_1(k) + 6T_s u(k)$$

$$x_2(k+1) = 2T_s x_1 + x_2(k)$$

$$y(k) = x_2(k)$$

Samt at Observerforsterkningen er

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}$$

Vi får da:

Steg 1: Finn måleestimatet

$$\bar{y}(k) = \bar{x}_2(k)$$

Steg 2: Finn estimator-avviket

$$e(k) = y(k) - \bar{y}(k)$$

Steg 3: Finn det korrigerte og predikerte (fremtidige) tilstandsestimatet

$$\bar{x}_1(k+1) = (1 - 2T_s)\bar{x}_1(k) + 6T_s u(k) + K_1 e(k)$$

$$\bar{x}_2(k+1) = 2T_s \bar{x}_1 + \bar{x}_2(k) + K_2 e(k)$$

[End of Task]

Hans-Petter Halvorsen, M.Sc.

E-mail: hans.p.halvorsen@hit.no

Blog: http://home.hit.no/~hansha/

University College of Southeast Norway

www.usn.no
